$\boxed{1}$

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$（$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は互いに独立なベクトル）とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$，

また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{c}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)$

よって，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)\right\}\\
&=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{c}\right|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)
\end{aligned}
$$

ここで，正四面体の各面は正三角形だから，

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\quad\cdots(答)
\end{aligned}
$$

(2)

目の積が 10 の倍数になるための条件は，5 の目と偶数の目が出ることである。

解法 1：余事象の確率を使う。

5 の目がでる確率を $P(5)$，偶数の目が出る確率を $P(\mathrm{e})$ とすると，余事象の確率は，

$$
\begin{aligned}
\overline{P(5)\cap P(\mathrm{e})}&=\overline{P(5)}\cup\overline{P(\mathrm{e})}\\
&=\overline{P(5)}+\overline{P(\mathrm{e})}-\overline{P(5)}\cap\overline{P(\mathrm{e})}\\
&=\left(1-\frac{1}{6}\right)^3+\left(1-\frac{3}{6}\right)^3-\left(1-\frac{4}{6}\right)^3\\
&=\frac{125+27-8}{6^3}\\
&=\frac{144}{6^3}\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

よって，求める確率は，$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$　・・・(答)

解法 2：排反に分類し，直接求める。

積が 10 の倍数になる場合を排反に分類すると，次のようになる。

場合 A：（5 の目，偶数の目，1,3 の目）

場合 B：（5 の目，5 の目，偶数の目）

場合 C：（5 の目，偶数の目，偶数の目）

場合 A の確率

1 つのサイコロから 5 の目が出る確率$=\frac{1}{6}$

1 つのサイコロから偶数の目が出る確率$=\frac{3}{6}$

1 つのサイコロから 3,4 の目が出る確率$=\frac{2}{6}$

どのサイコロからどの目が出るかの場合の数$=3!$通り

よって，場合 A の確率$=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3!=\frac{36}{6^3}$

場合 B の確率

同様に，$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3=\frac{9}{6^3}$

場合 C の確率

同様に，$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot 3=\frac{27}{6^3}$

求める確率は，場合 A または場合 B または場合 C の確率より，

$\frac{36}{6^3}+\frac{9}{6^3}+\frac{27}{6^3}=\frac{9(4+1+3)}{6^3}=\frac{1}{3}$　・・・(答)

$\boxed{2}$

(1)

略解 1

$$\sum_{n=0}^{99} 3^n = \frac{3^{99+1} - 3^0}{3-1} = \frac{3^{100}-1}{2}$$

$\log_{10} 3^{100} = 100\log_{10} 3 = 47.71 = 47 + 0.71$

$\log_{10} 3 < 0.71 < \log_{10} 10$ より，$47 + \log_{10} 3 < \log_{10} 3^{100} < 47 + \log_{10} 10$

$\therefore \log_{10} 3 \cdot 10^{47} < \log_{10} 3^{100} < \log_{10} 10^{48}$

$\therefore 3 \cdot 10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$

これと $\dfrac{3\cdot 10^{47}-1}{2} - 10^{47} = \dfrac{10^{47}-1}{2} > 0$ より，$10^{47} < \dfrac{3\cdot 10^{47}-1}{2} < \dfrac{3^{100}-1}{2} < 10^{48}$

よって，48 桁　・・・(答)

略解 2

$$\sum_{n=0}^{99} 3^n = \frac{3^{99+1} - 3^0}{3-1} = \frac{3^{100}-1}{2}$$

$$\frac{3^{100}-1}{2} - 3^{100} = \frac{1}{2}\left(-3^{100}-1\right) < 0$$

$$\frac{3^{100}-1}{2} - 3^{99} = \frac{1}{2}\left(3\cdot 3^{99} - 1 - 3^{99}\right) = \frac{1}{2}\left(2\cdot 3^{99} - 1\right) > 0$$

$$\therefore 3^{99} < \frac{3^{100}-1}{2} < 3^{100}$$

$$\therefore 99\log_{10} 3 < \log_{10}\frac{3^{100}-1}{2} < 100\log_{10} 3$$

$$\therefore 100\log_{10} 3 - \log_{10} 3 < \log_{10}\frac{3^{100}-1}{2} < 100\log_{10} 3$$

$$\therefore 47.71 - 0.4771 < \log_{10}\frac{3^{100}-1}{2} < 47.71$$

$$\therefore 47.2329 < \log_{10}\frac{3^{100}-1}{2} < 47.71$$

$$\therefore 10^{47} < 10^{47.2329} < \frac{3^{100}-1}{2} < 10^{47.71} < 10^{48}$$

よって，48 桁　・・・(答)

補足

$\dfrac{3^{100}-1}{2}$ が 48 桁であることは直感できる（多分)。

だから，適当な不等式を作って，それを示せばよい。

(2)

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor=k$（k は自然数）とおくと，

これを $\lfloor\sqrt{n}\rfloor=k$ を満たす $\sqrt{n}$ は，$k\le\sqrt{n}<k+1$　$\therefore k^2\le n<k^2+2k+1$

よって，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，つまり k を約数にもつ n は，$k^2, k(k+1), k(k+2)$ である。

k を約数にもつ n が 3 数存在するとき

$1\le k^2<k(k+1)<k(k+2)\le 10000$ より，$k=1,2,3,\cdots,99$

k を約数にもつ n が 1 つだけのとき

$k^2\le 10000<k(k+1)$ より，$k=100$

よって，求める個数は，$3\times 99+1=298$　・・・(答)

補足

実験すると，

n	$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$
1	**1**
2	**1**
3	**1**
4	**2**
5	2
6	**2**
7	2
8	**2**
9	**3**
10	3
11	3
12	**3**
13	3
14	3
15	**3**

これより，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ を約数にもつ n は 3 つずつあることが推測できる。

これを $[A]=m \Leftrightarrow m\le A<m+1$ を利用して示せばよい。

$\boxed{3}$

(1)

C と l が共有点をもつとき，$x^3-3x^2+2x=ax$ が成り立つ。

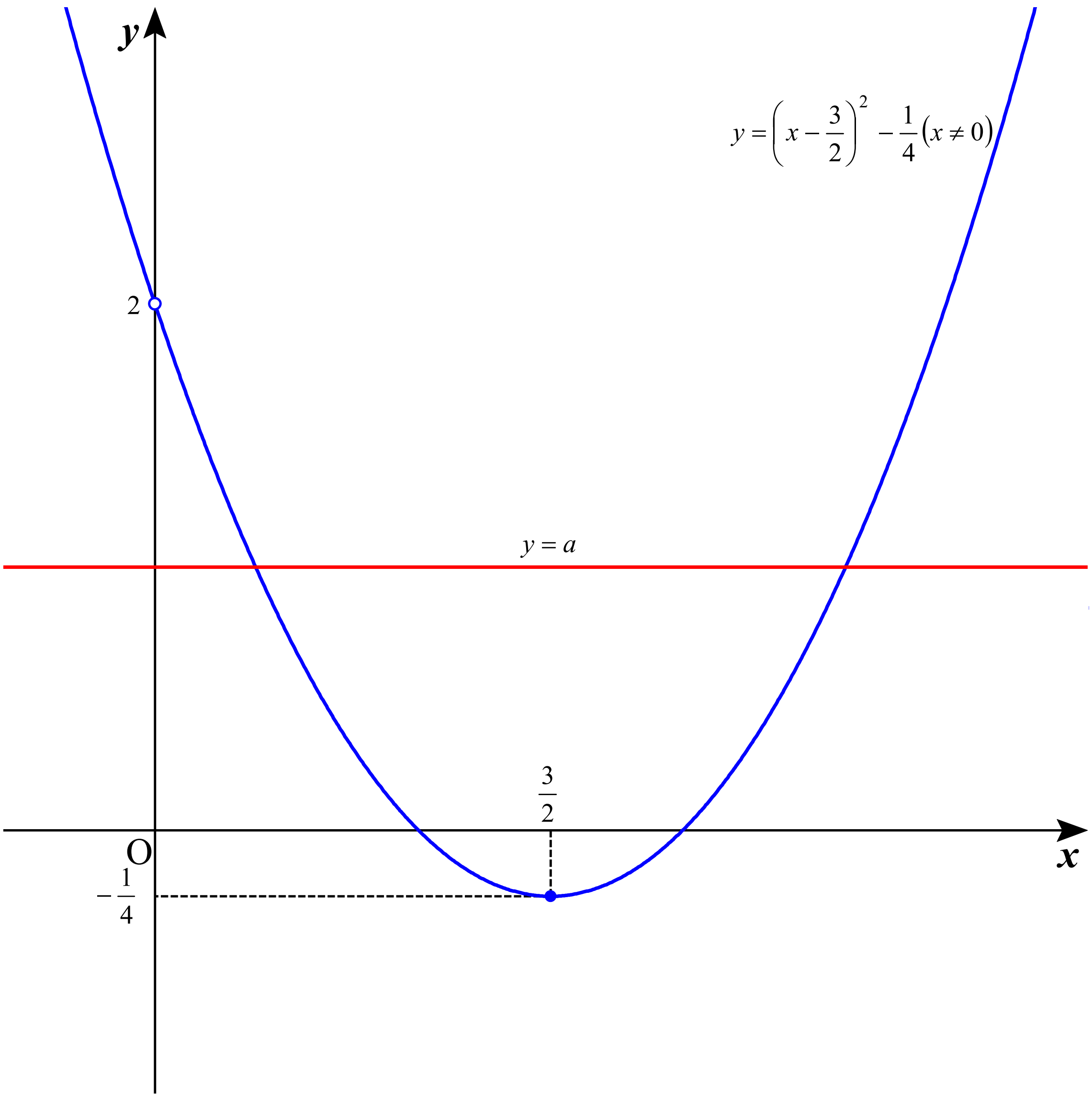
$\therefore x(x^2-3x+2-a)=0 \quad \therefore x=0,\ x^2-3x+2-a=0$

よって，C と l が原点以外に共有点をもつとき，

$x^2-3x+2-a=0$ が $x\neq 0$ を満たす実数解をもつ。

これは $y=x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\ (x\neq 0)$ と $y=a$ が共有点をもつことと同値であるから，

求める実数 a の範囲は，下図より，$a\geq -\dfrac{1}{4}$　・・・(答)



(2)

$S(a)$は，$y=x^3-3x^2+(2-a)x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積としてよい。

ここで，$x^2-3x+2-a=0$ の解を α,β（$\alpha\leq\beta$）とすると，

$y=x^3-3x^2+(2-a)x$ と x 軸との交点は，$(0,0),(\alpha,0),(\beta,0)$

$0,\alpha,\beta$ の大小関係については，

(1)より，$a\geq 2$ のとき $\alpha\leq 0<\beta$，$-\frac{1}{4}<a\leq 2$ のとき $0\leq\alpha<\beta$ である。

（ｉ）$a\geq 2$ のとき

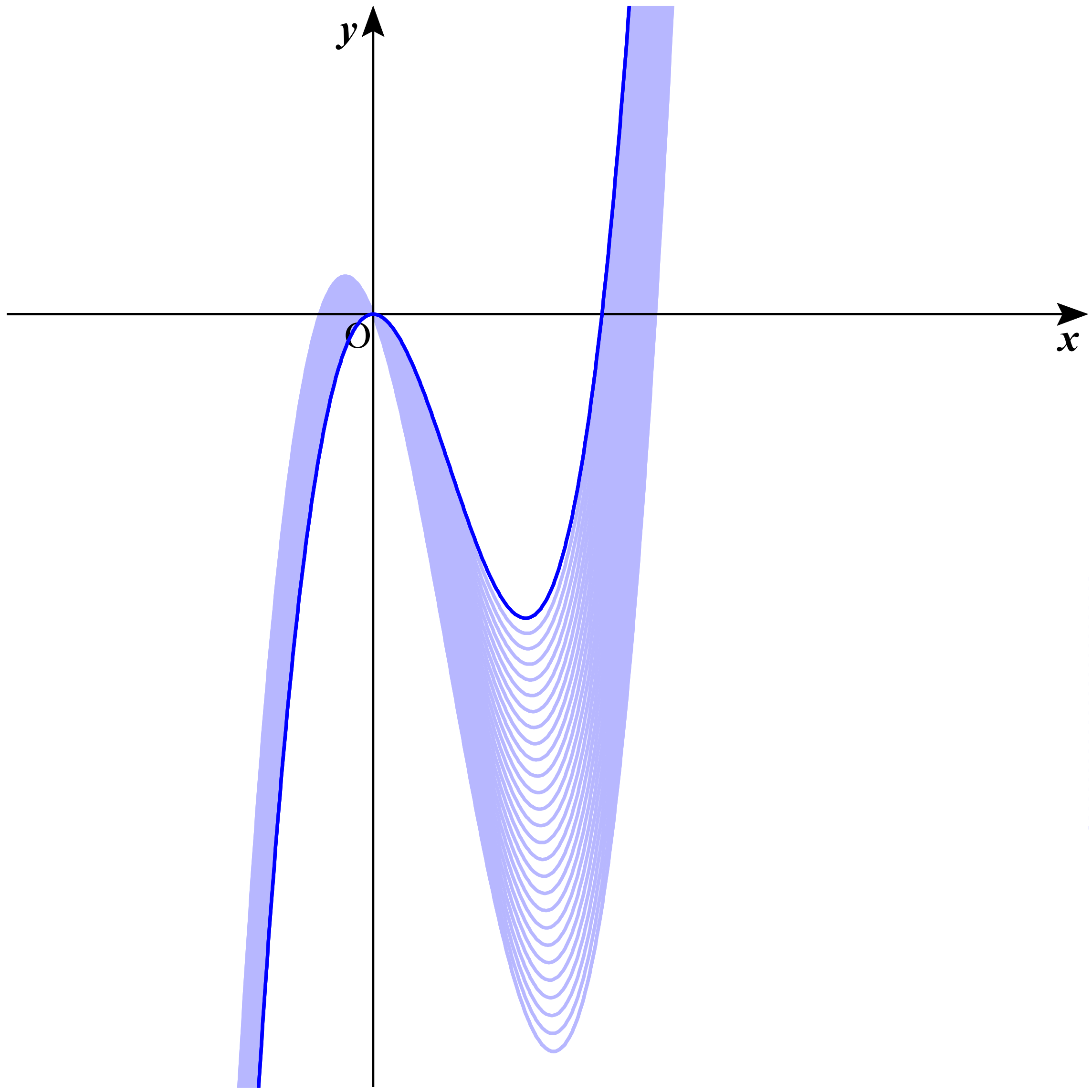
$$S(a)=\int_\alpha^0\left\{x^3-3x^2+(2-a)x\right\}dx-\int_0^\beta\left\{x^3-3x^2+(2-a)x\right\}dx$$
$$=\int_\alpha^0\left\{x^3-3x^2+(2-a)x\right\}dx+\int_\beta^0\left\{x^3-3x^2+(2-a)x\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_\alpha^0+\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{2-a}{2}x^2\right]_\beta^0$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\alpha^4+\beta^4\right)+\left(\alpha^3+\beta^3\right)-\frac{2-a}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$$

$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=2-a$ より，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2(2-a)=2a+5$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27-9(2-a)=9a+9$$
$$\alpha^4+\beta^4=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2=(2a+5)^2-2(2-a)^2=2a^2+28a+17$$

$$\therefore S(a)=-\frac{1}{4}\left(2a^2+28a+17\right)+9a+9-\frac{2-a}{2}(2a+5)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2+5a-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{27}{8}$$

よって，$a=2$ のとき，最小値 $S(2)=\frac{27}{4}$ をとなる。


y
O
x

（ii） $-\dfrac{1}{4} \leq a \leq 2$ のとき

$$S(a) = \int_0^\alpha \left\{x^3 - 3x^2 + (2-a)x\right\}dx - \int_\alpha^\beta \left\{x^3 - 3x^2 + (2-a)x\right\}dx$$

$$= \int_0^\alpha \left\{x^3 - 3x^2 + (2-a)x\right\}dx + \int_\beta^\alpha \left\{x^3 - 3x^2 + (2-a)x\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2-a}{2}x^2\right]_0^\alpha + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2-a}{2}x^2\right]_\beta^\alpha$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\alpha^4 - \alpha^3 + \frac{2-a}{2}\alpha^2\right) - \left(\frac{1}{4}\beta^4 - \beta^3 + \frac{2-a}{2}\beta^2\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}\left\{\alpha^4 - 4\alpha^3 + (4-2a)\alpha^2\right\} - \frac{1}{4}\left\{\alpha^4 - 4\alpha^3 + (4-2a)\alpha^2\right\}$$

ここで，$\alpha^2 - 3\alpha + 2 - a = 0$，$\beta^2 - 3\beta + 2 - \beta = 0$ より，

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 + (4-2a)\alpha^2 = (\alpha^2 - \alpha - 1 - a)(\alpha^2 - 3\alpha + 2 - a) - (4a+1)\alpha - (a+1)(a-2)$$

$$= -(4a+1)\alpha - a^2 + a + 2$$

同様に，

$$\beta^4 - 4\beta^3 + (4-2a)\beta^2 = -(4a+1)\beta - a^2 + a + 2$$

$$\therefore S(a) = 2 \cdot \frac{1}{4}\left\{-(4a+1)\alpha - a^2 + a + 2\right\} - \frac{1}{4}\left\{-(4a+1)\beta - a^2 + a + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(4a+1)(-2\alpha + \beta) - a^2 + a + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4a+1)\left\{(\alpha+\beta) - 3\alpha\right\} - a^2 + a + 2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{3(4a+1)(1-\alpha) - a^2 + a + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-a^2 + 13a + 5 - 3(4a+1)\alpha\right\}$$

$x^2 - 3x + 2 - a = 0$ の解を α, β（$\alpha \leq \beta$）としたから，$\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{4a+1}}{2}$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{4}\left\{-a^2 + 13a + 5 - 3(4a+1) \cdot \frac{3 - \sqrt{4a+1}}{2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\left\{2a^2 + 10a - 1 - 3(4a+1)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\therefore S'(a)=-\frac{1}{4}\left(2a+5-9\sqrt{4a+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\left(2a+5-9\sqrt{4a+1}\right)\times\frac{2a+5+9\sqrt{4a+1}}{2a+5+9\sqrt{4a+1}}$$
$$=-\frac{(2a+5)^2-81(4a+1)}{4\left(2a+5+9\sqrt{4a+1}\right)}$$
$$=\frac{a^2-76a-14}{2a+5+9\sqrt{4a+1}}$$
$$=-\frac{\left\{a-\left(38+27\sqrt{2}\right)\right\}\left\{a-\left(38-27\sqrt{2}\right)\right\}}{2a+5+9\sqrt{4a+1}}$$

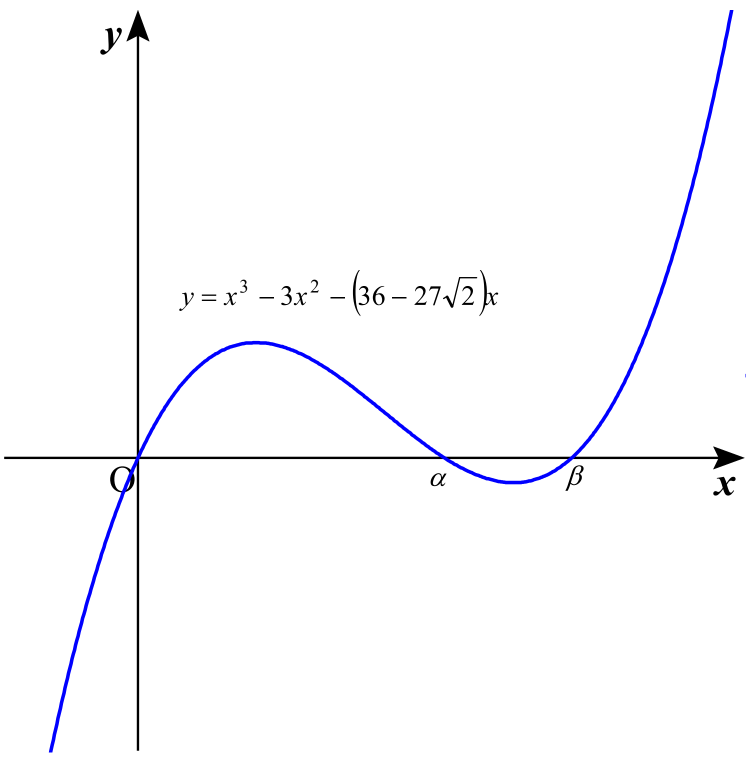
これと $2a+5+9\sqrt{4a+1}>0$ より，増減表は次のようになる。

a	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$38-27\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\downarrow$	極小	$\uparrow$	$\frac{27}{4}$

よって，$S(a)$は，$a=38-27\sqrt{2}$ のとき最小となる。

以上（ⅰ），（ⅱ）より，

$S(a)$が最小値をとるときの a の値は，$38-27\sqrt{2}$　・・・(答)



$\boxed{4}$

(1)

$a_1 = \dfrac{1}{n(n+1)}$，　$a_{k+1} = -\dfrac{1}{k+n+1} + \dfrac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$ より，

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{1+n+1} + \frac{n}{1}\sum_{i=1}^{1} a_i \\
&= -\frac{1}{n+2} + na_1 \\
&= -\frac{1}{n+2} + n \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\
&= -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{1}{2+n+1} + \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{2} a_i \\
&= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2}(a_1 + a_2) \\
&= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\
&= -\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2)

(1)より，　$a_k = \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ $(k = 1,2,3,\cdots)$であることが推測されるので,

これが成り立つことを数学的帰納法により示す。

(ｉ)

$k=1$のとき

$a_1 = \dfrac{1}{n(n+1)}$ より，　$a_k = \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ が成り立つ。

（ⅱ）

$k=1,2,3,\cdots,l$ において $a_l=\dfrac{1}{(n+l-1)(n+l)}$ が成り立つと仮定すると，

$$
\begin{aligned}
a_{l+1}&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}\\
&=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\\
&=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{n}{l}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+l-1}-\frac{1}{n+l}\right)\right\}\\
&=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)\\
&=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}\\
&=\frac{1}{[n+\{(l+1)-1\}]\{n+(l+1)\}}
\end{aligned}
$$

よって，$k=l+1$ のときも $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ が成り立つ。

（ⅰ），（ⅱ）より，任意の自然数 k について，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ が成り立つ。

ゆえに，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ ・・・(答)

(3)

$\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ より，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}\qquad \therefore\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}<b_k<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[\log(1+x)]_0^1=\log 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[\log(1+x)]_0^1=\log 2$$

よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$

5

(1)

題意と任意の点 P に対して常に $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=k$ （$k>0$）が成り立つことは同値であるから，

$\mathrm{P}(\alpha,\beta)$（α,β は任意，ただし，α,β の少なくとも一方は 0 でない）とおくと，

$$\mathrm{P'}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\alpha+b\beta\\ c\alpha+d\beta\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{OP'}=\sqrt{(a\alpha+b\beta)^2+(c\alpha+d\beta)^2}=\sqrt{(a^2+c^2)\alpha^2+2(ab+cd)\alpha\beta+(b^2+d^2)\beta^2}$$

また，$\mathrm{OP}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

よって，$\sqrt{(a^2+c^2)\alpha^2+2(ab+cd)\alpha\beta+(b^2+d^2)\beta^2}=\sqrt{k^2\alpha^2+k^2\beta^2}$

これが任意の α,β で成り立つためには，

上の式が 2 変数 α,β についての恒等式でなければならない。

よって，$a^2+c^2=b^2+d^2=k^2$，$ab+cd=0$ であればよい。

逆に，$a^2+c^2=b^2+d^2=k^2$，$ab+cd=0$ ならば $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=k$ （k は実数定数）が成り立つ。

(2)

(1)より $a^2+c^2=b^2+d^2$ ・・・①，$ab+cd=0$ ・・・②

条件より $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 0\end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix}a+\sqrt{3}b\\ c+\sqrt{3}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 0\end{pmatrix}$

よって，$a=-\sqrt{3}b-4$ ・・・③，$c=-\sqrt{3}d$ ・・・④

①，③，④より $(-\sqrt{3}b-4)^2+3d^2=b^2+d^2$ $\therefore b^2+4\sqrt{3}b+d^2=-8$ ・・・⑤

②，③，④より $(-\sqrt{3}b-4)b+(-\sqrt{3}d)\cdot d=0$ $\therefore d^2=-b^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b$ ・・・⑥

⑤，⑥より $b^2+4\sqrt{3}b+\left(-b^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}b\right)=-8$ $\therefore b=-\sqrt{3}$ ・・・⑦

⑦と④より $a=-1$，⑦と⑥より $d^2=1$ $\therefore d=\pm 1$ ・・・⑧

⑧と④より $c=\mp\sqrt{3}$

また，$k>0$ より，$k=\sqrt{a^2+c^2}=2$ よって，常に $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=2$ が成り立つ。

以上より，$A=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ ・・・(答)

6

解法 1：平面 $z=t$ で切断し，必要な面積（被積分関数）を t と θ の合成関数にする。

三角形 ABC を四面体 PABC の底面とすると，

AB＝BC＝CA＝$2\sqrt{3}$，重心の座標$\left(\dfrac{0+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3},\dfrac{2+(-1)+(-1)}{3},\dfrac{0+0+0}{3}\right)=(0,0,0)$より，

正角形 ABC は，原点 O を重心とする一辺の長さ$2\sqrt{3}$の正三角形である。

また，正三角形の内心と重心が一致することから，内接円の半径を r とすると，

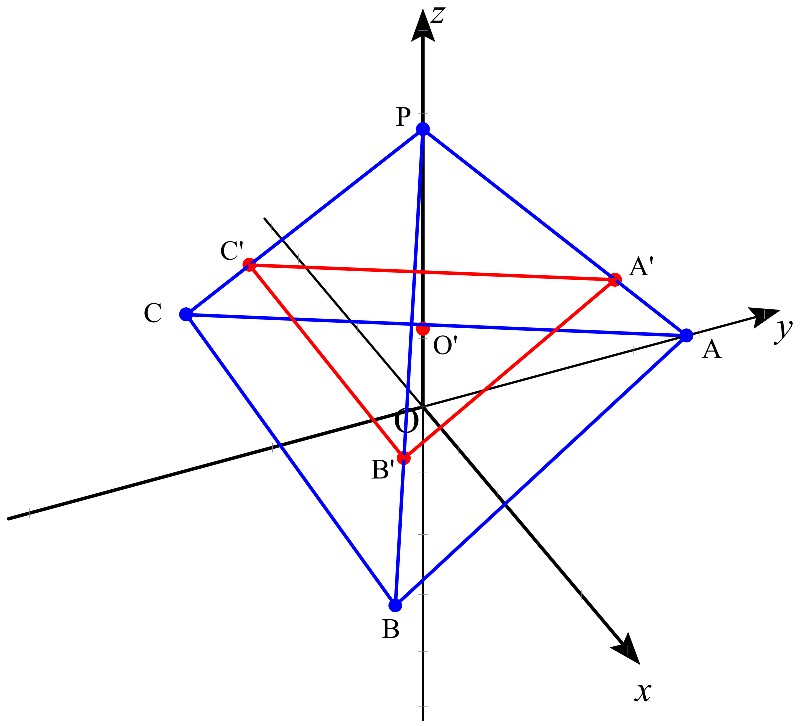
△ABC の面積について，$\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}r\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)$ $\quad\therefore r=1$

よって，底面，すなわち $z=0$ において，円 $x^2+y^2=1$ は△ABC に内接する。

さらに，平面 $z=t$ $(0\leq t\leq 2)$ と PO,PA,PB,PC の交点を O', A', B', C' とすると，

$\mathrm{A'B'=B'C'=C'A'}$ $\left(\mathrm{AB//A'B',BC//B'C',CA//C'A'}\right)$，$\Delta\mathrm{PO'A'}\equiv\Delta\mathrm{PO'B'}\equiv\Delta\mathrm{PO'C'}$ より，

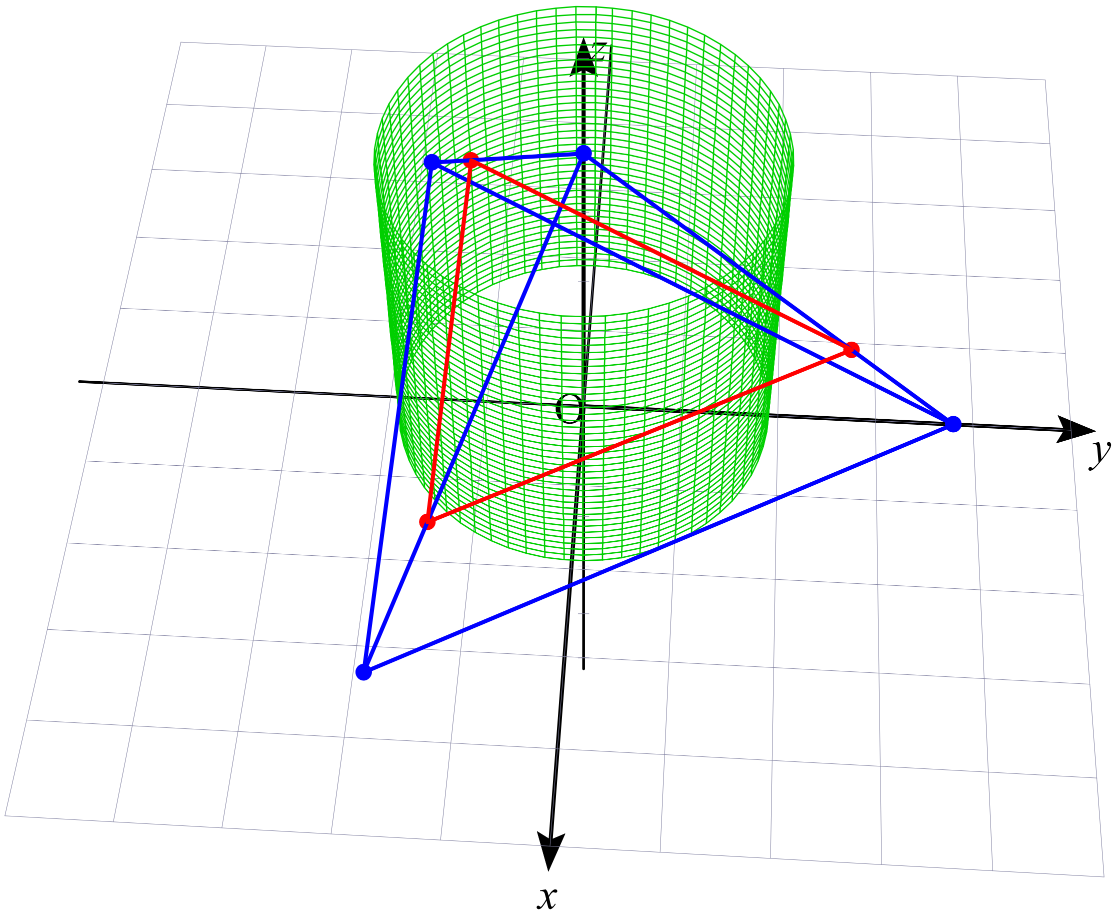
$\Delta\mathrm{A'B'C'}$ は重心を $\mathrm{O'}\ (0.0,t)$ とする正三角形である。



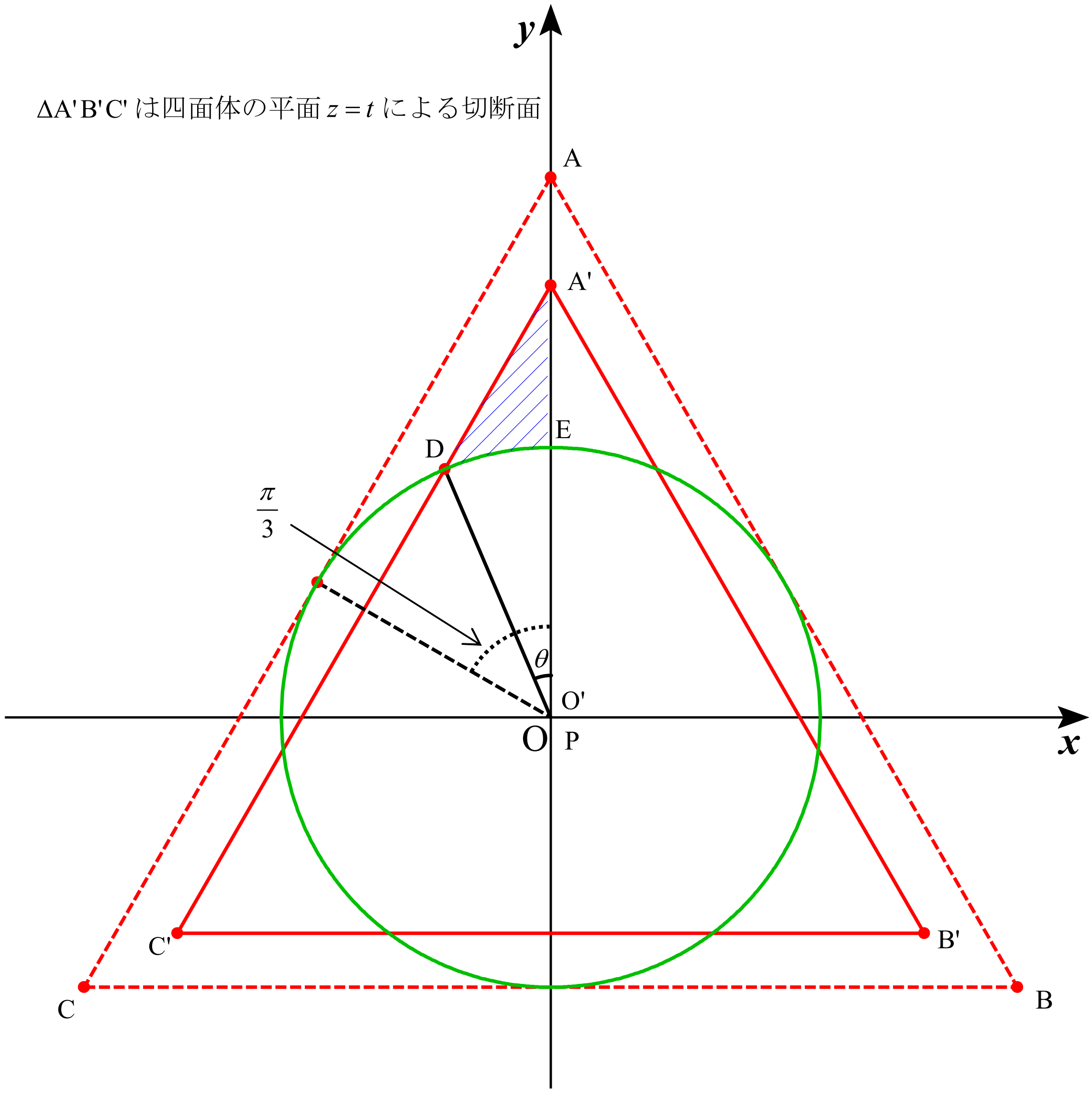
よって，$\Delta \mathrm{A'B'C'}$ の周を含む内部の領域のうち，$x^2+y^2\geq 1$ を満たす部分の面積を求め，それを t について積分すればよい。

コツ

切断面の平面図形のうち，必要な部分の交点や直線をチェックし，
それを別の角度から眺めることで，それらの位置や式を媒介変数表示する。

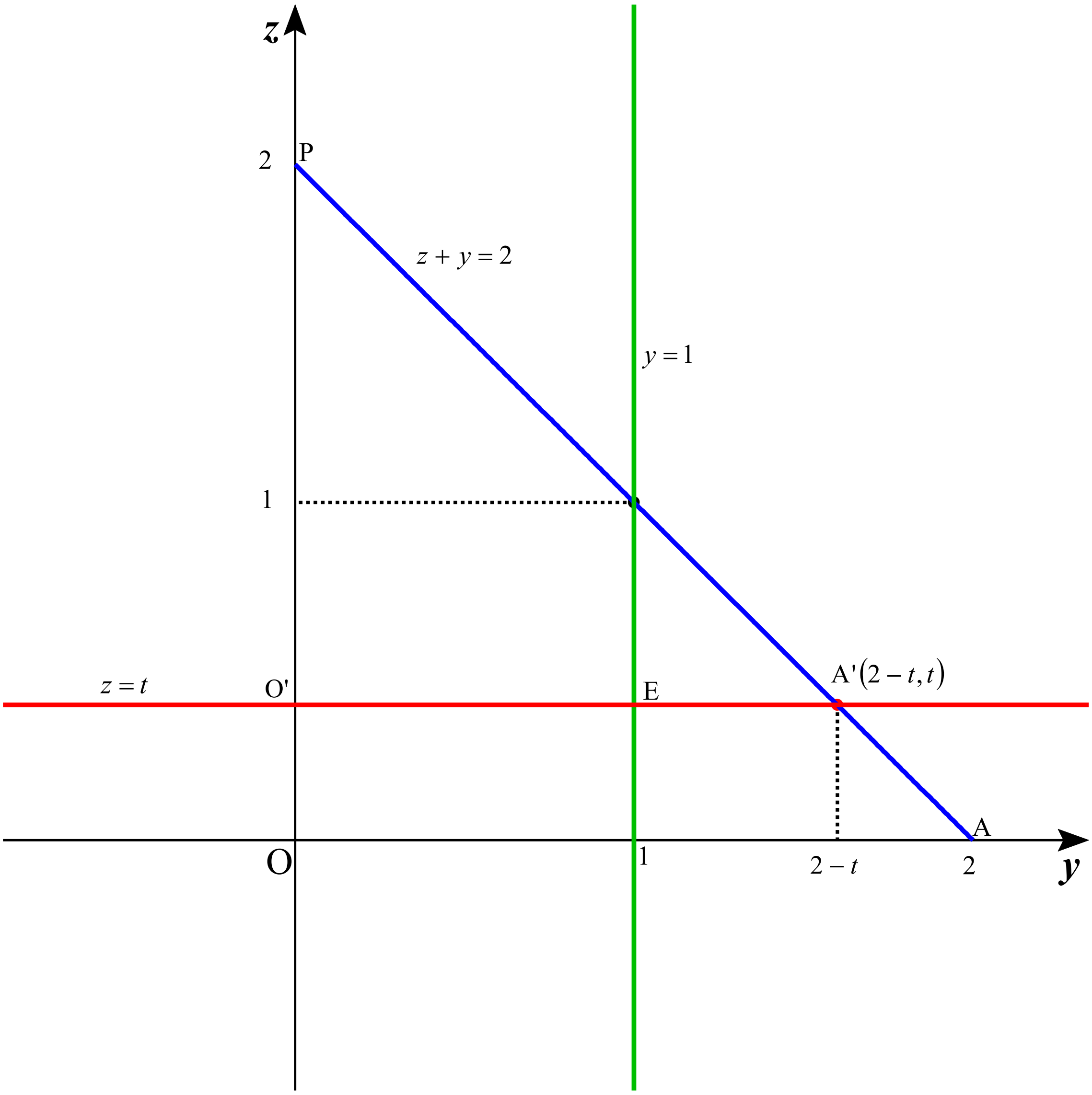


xy 平面上に投影した図



平面 $z=t$ の切断面における題意を満たす部分の面積は，対称性と合同性より，
ΔO'A'D の面積から扇形 O'DE の面積を引いた面積を 6 倍したものである。

左図斜線部を含む図形を ***yz*** 平面上に投影した図



$\Delta \mathrm{O'A'D}$ の面積から扇形 $\mathrm{O'DE}$ の面積を引いた面積を $S(t)$ とすると，

$\mathrm{O'D} = \mathrm{O'E} = 1$ より，

$\Delta \mathrm{O'A'D}$ の面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{O'D}\cdot\mathrm{O'A'}\sin\theta = \dfrac{1}{2}(2-t)\sin\theta \quad \left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}\right)$

扇形 $\mathrm{O'DE}$ の面積$=\dfrac{1}{2}\theta$

$\therefore S(t) = \dfrac{1}{2}(2-t)\sin\theta - \dfrac{1}{2}\theta$

また，$0 \le t \le 1$

よって，求める体積を V とすると，$V = 6\int_0^1 S(t)dt = 3\int_0^1 \{(2-t)\sin\theta - \theta\}d\theta$

ここで，$\angle \mathrm{D'A'O'}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{O'D'}=1$，$\dfrac{\mathrm{O'A'}}{\sin\angle \mathrm{A'DO'}}=\dfrac{\mathrm{O'D'}}{\sin\angle \mathrm{DA'O'}}$（正弦定理）より，

$$\mathrm{O'A'}=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)$$

$$\therefore 2-t=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\quad \therefore dt=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$ また，$t=1\Rightarrow\theta=0$，$t=0\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって，$S(t)$ は θ で置換積分でき，

$$6\int_0^1 S(t)dt=3\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left\{2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-\theta\right\}\cdot 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$

$$=12\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta d\theta+6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$

さらに，ここで，

$$\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left\{\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)-\theta\right\}-\cos\left\{\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)+\theta\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)-\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)\right\}$$

より，

$$12\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)-\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)\right\}d\theta$$

$$=3\left[-\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$=\sqrt{3}$$

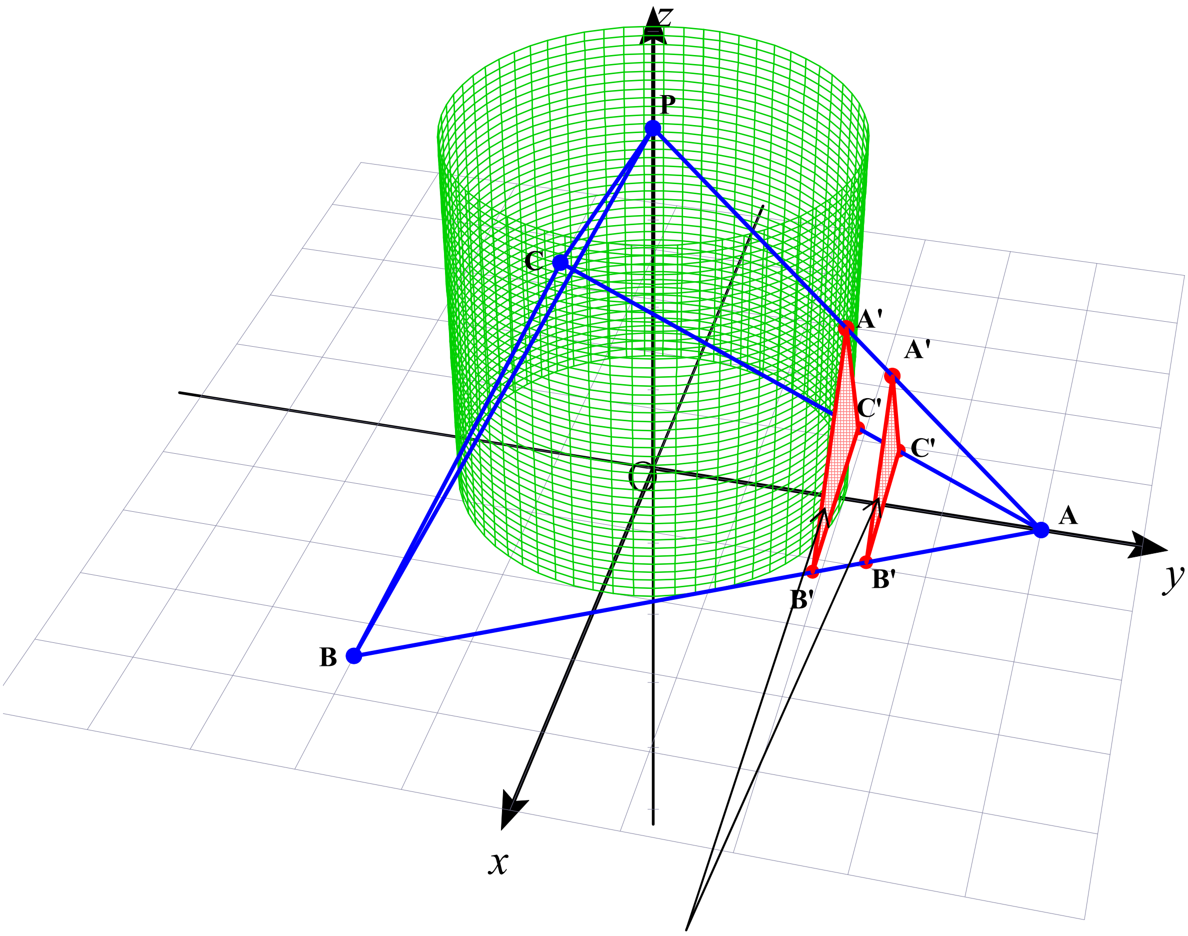
$$6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta=6\left[-\theta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$

$$=-2\pi+6\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2\pi+3\sqrt{3}$$

よって，$V=\sqrt{3}+\left(-2\pi+3\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}-2\pi$　・・・(答)

解法 **2**：平面 $\boldsymbol{y=u}$ で切断



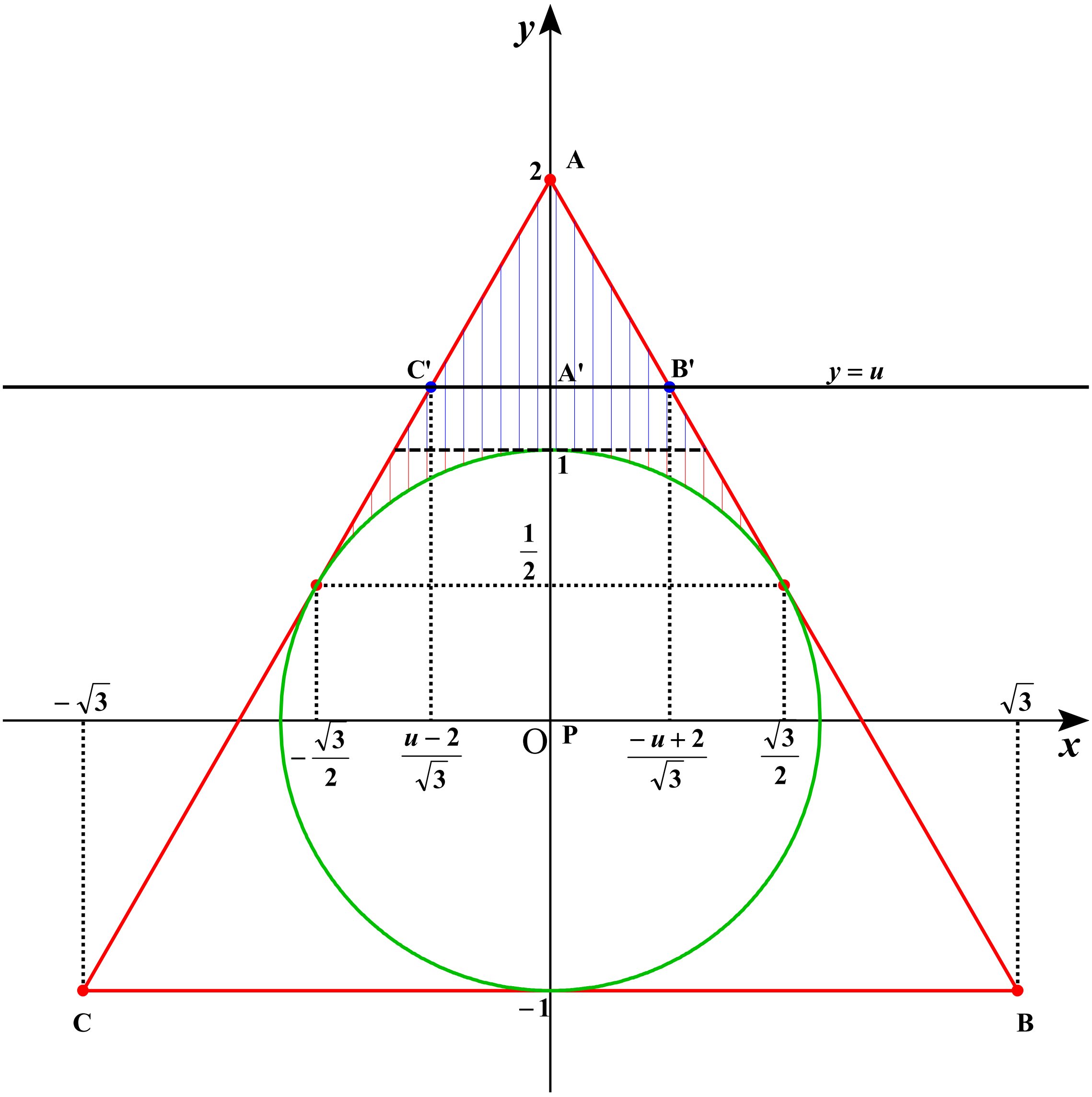
四面体の平面 $y=u$ による切断面を ΔA'B'C' とする。

右は円柱の側面と交わらない場合

左は円柱の側面と交わる場合

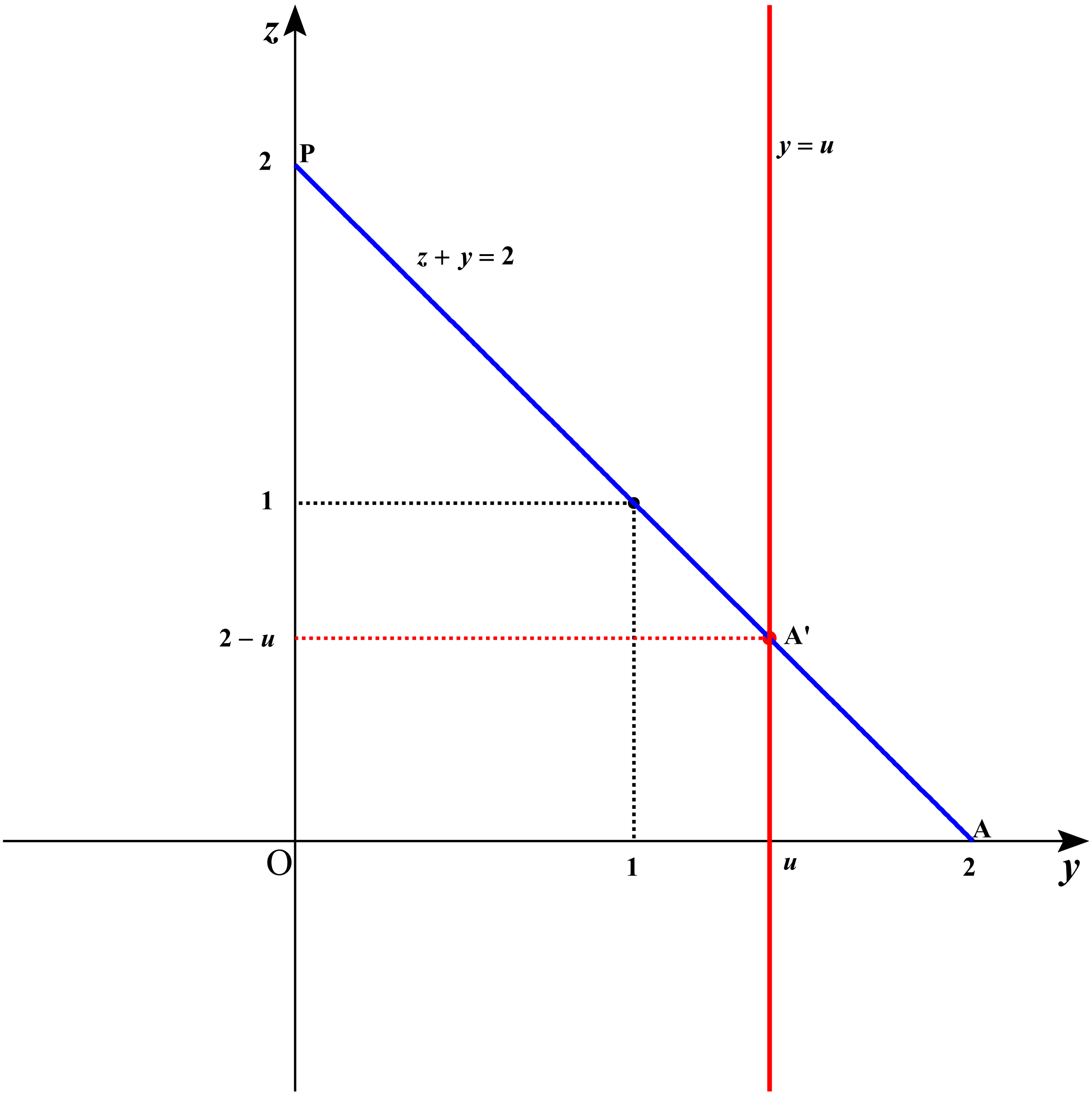
（ｉ） $1 \le u \le 2$ のときの切断面の面積と体積

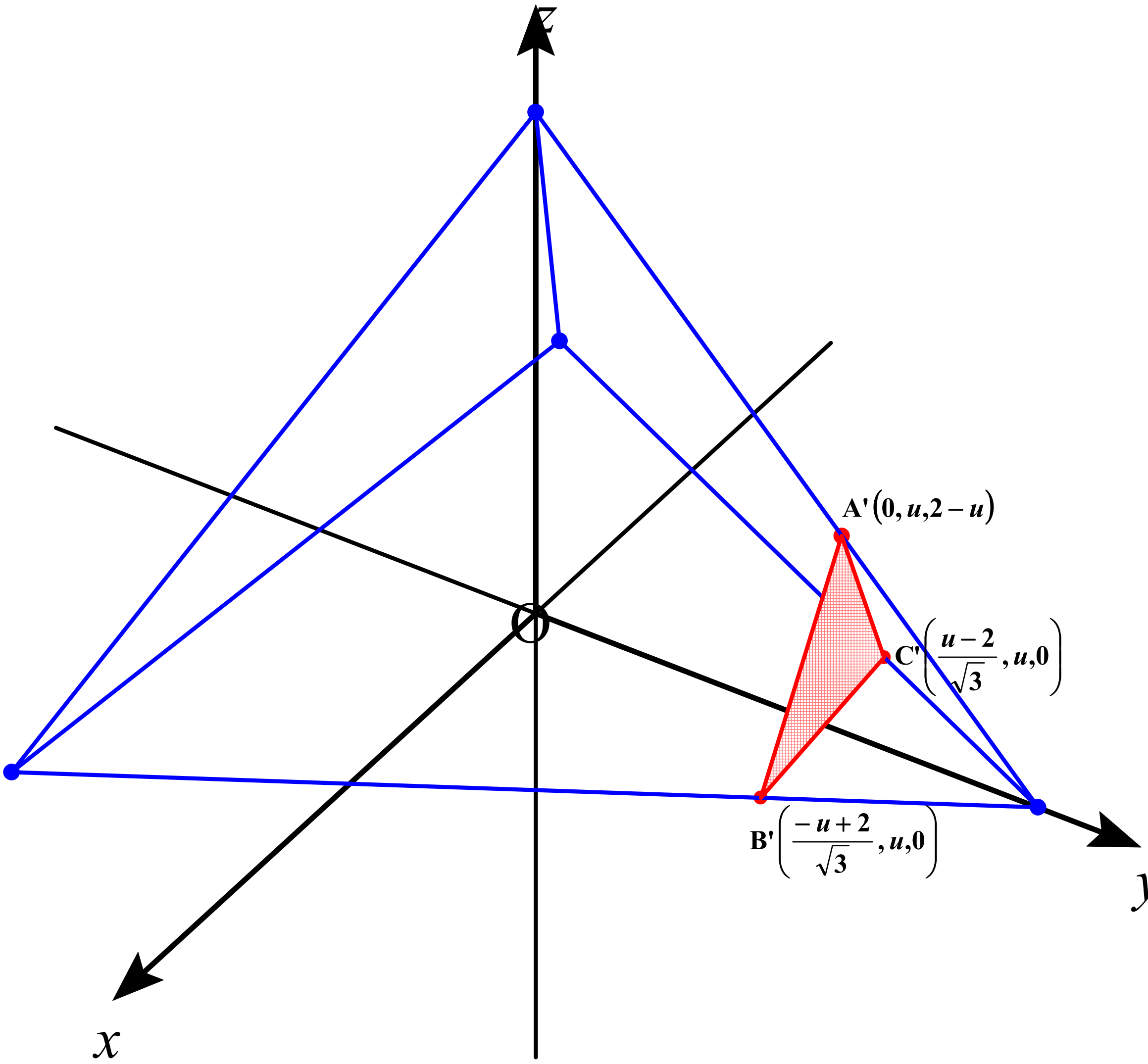
xy 平面に投影した図



$\frac{1}{2} \le u \le 1$ （青色縦線）のとき重なり，$1 \le u \le 2$ （赤色縦線）のとき重ならない。

yz 平面上に投影した図





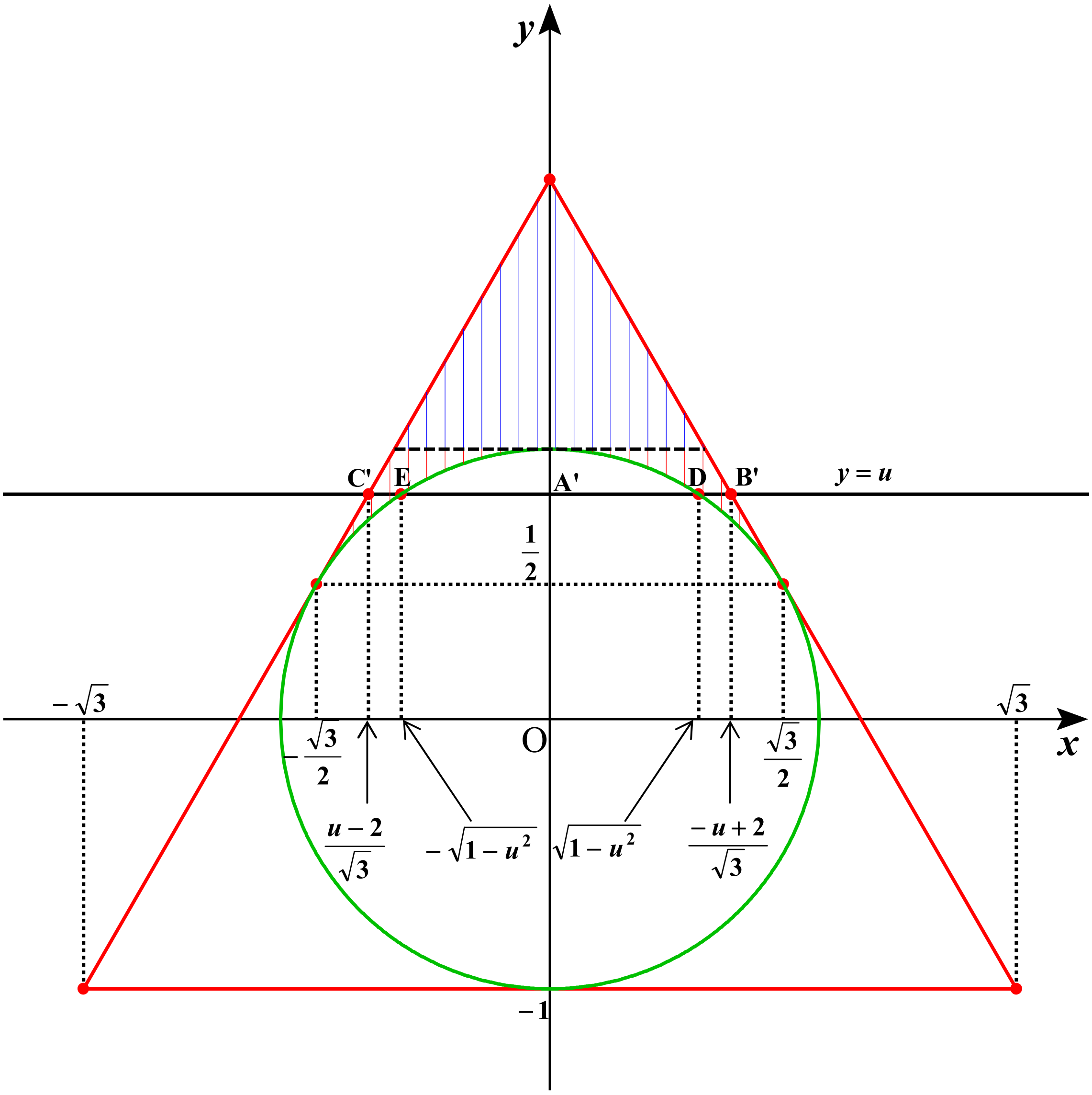
$\mathrm{A'B'}=\sqrt{\left(\frac{-u+2}{\sqrt{3}}\right)^2+0^2+(u-2)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(2-u)$, $\mathrm{A'C'}=\frac{2}{\sqrt{3}}(2-u)$, $\mathrm{B'C'}=\frac{2}{\sqrt{3}}(2-u)$ より,

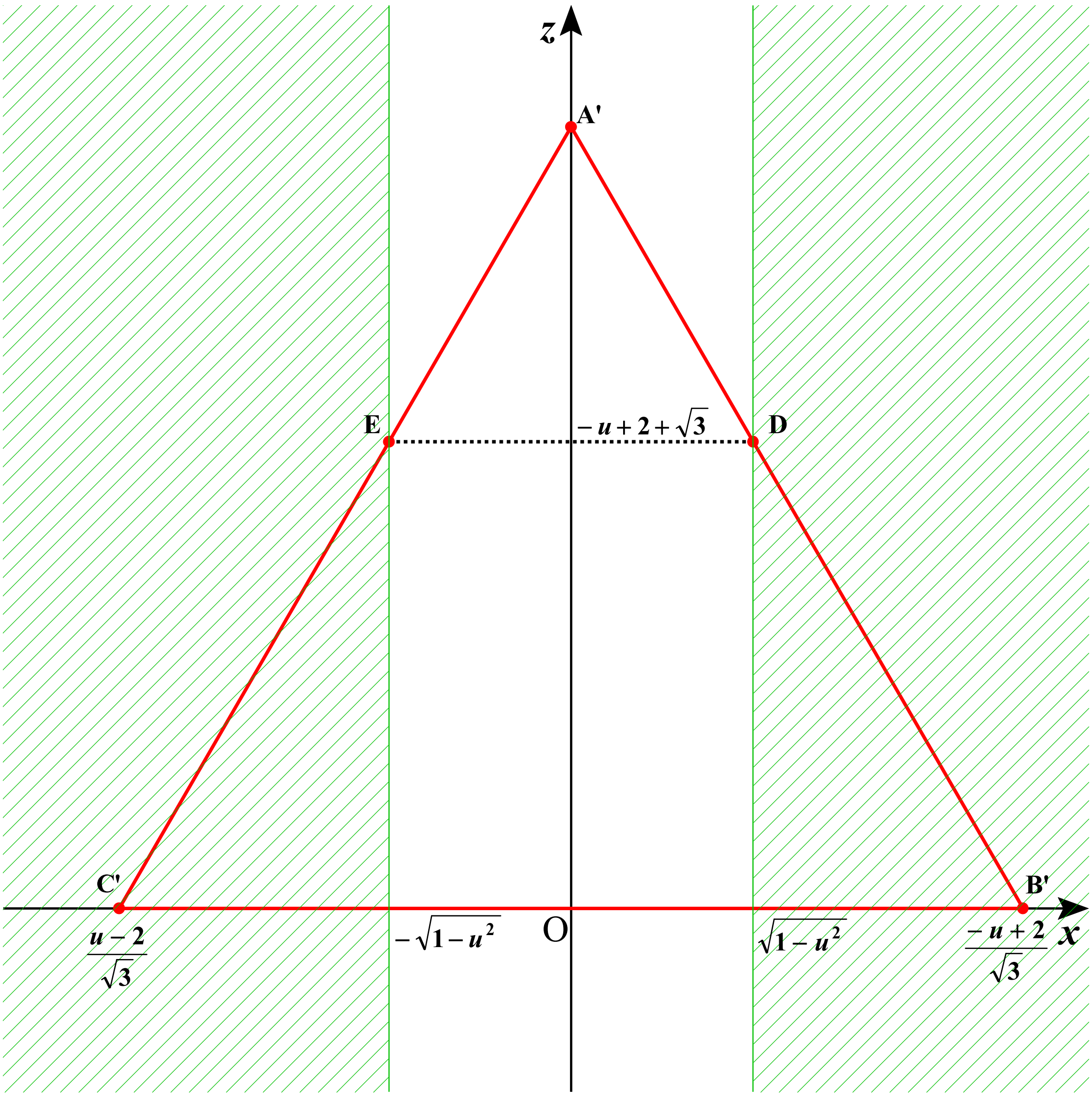
$\Delta\mathrm{A'B'C'}$ は正三角形

$\therefore \Delta\mathrm{A'B'C'}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}(2-u)\right\}^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}(2-u)^2$

$\therefore V=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_1^2(2-u)^2du$ ・・・①

（ⅱ） $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$ のときの切断面の面積と体積





より，$\Delta A'B'C'$ と斜線部領域の面積は,

$$2\times\frac{1}{2}\left(\frac{-u+2}{\sqrt{3}}-\sqrt{1-u^2}\right)^2\tan 60^\circ=\sqrt{3}\left\{\frac{(-u+2)^2}{3}+1-u^2-\frac{2}{\sqrt{3}}(2-u)\sqrt{1-u^2}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(u-2)^2-\sqrt{3}\left(u^2-1\right)-4\sqrt{1-u^2}+2u\sqrt{1-u^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(u-2)^2-\sqrt{3}\left(u^2-1\right)-4\sqrt{1-u^2}-\frac{2}{3}\left\{\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'$$

$$\therefore V=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(u-2)^2\,du-\sqrt{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(u^2-1\right)du-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du-\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'du \quad \cdots ②$$

①＋②より，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{2}(u-2)^2\,du-\sqrt{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(u^2-1\right)du-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du-\frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}'du$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\left[(u-2)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2}-\sqrt{3}\left[\frac{u^3}{3}-u\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-4\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{2}{3}\left[\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{24}-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}\pi$$

よって，求める体積は，$3\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}\pi\right)=4\sqrt{3}-2\pi$　・・・(答)